# Πολλαπλές ρίζες

Παράδειγμα Η $f(x)=x^2$ που γνωρίζουμε ότι το $x^*=0$ είναι διπλή ρίζα.

Ο αλγόριθμος λέει: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} =$

$$= x_n - \frac{1}{2} x_n = \frac{1}{2} x_n$$

Δηλ. δ προκύπτει ο αναδρομικός τύπος $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n$ και συνεπώς $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x_0$ και άρα $\lim x_n = x^* = 0$

Τάξη σύγκλισης $\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^1} = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$ τάξη σύγκλισης 1.

Γενικά Θεωρώ $x^*$ μια ρίζα της συνάρτησης $f(x)$ πολλαπλότητας $m$, δηλ.

$f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$

και $f^{(m)}(x^*) \neq 0$

και έστω ότι η $f$ είναι $m$-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του $x^*$

Τότε απο το ανάπτυγμα του Taylor έχουμε

$f(x_n) = f(x^*) + x_n -$

Άρα $f(x_n) = \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_1)$ ξ σημείο μεταξύ του $x_n$ και $x^*$

Επίσης $f'(x_n) = \frac{m(x_n - x^*)^{m-1}}{m!} f^{(m)}(\xi_2)$

Επανερχόμαστε στον αλγόριθμο της μεθόδου

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_1)}{\frac{m(x_n - x^*)^{m-1}}{m!} f^{(m)}(\xi_2)}$$

$$= x_n - \frac{x_n - x^*}{m} \frac{f^{(m)}(\xi_1)}{f^{(m)}(\xi_2)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x^*}{m} \frac{f^{(m)}(\xi_1)}{f^{(m)}(\xi_2)} \Longrightarrow$$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{x_n - \frac{x_n - x^*}{m} \cdot \frac{f^{(m)}(\xi_1)}{f^{(m)}(\xi_2)} - x^*}{(x_n - x^*)^p}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{m} \frac{f^{(m)}(\xi_1)}{f^{(m)}(\xi_2)}}{(x_n - x^*)^{p-1}}$$

$\lim x_n = x^*$

$\lim \xi_1 = \lim \xi_2 = x^*$

$= 1 - \frac{1}{m}$ για $p=1$

Για $m \geq 2$ $1 - \frac{1}{m} \neq 0$ άρα η τάξη σύγκλισης είναι 1

Μπορεί να συγκλίνει τετραγωνικά η μέθοδος?

<u>Παραλλαγή</u>: $x_{n+1} = x_n - \frac{m f(x_n)}{f'(x_n)}$ $m$ η πολλαπλότητα της ρίζας

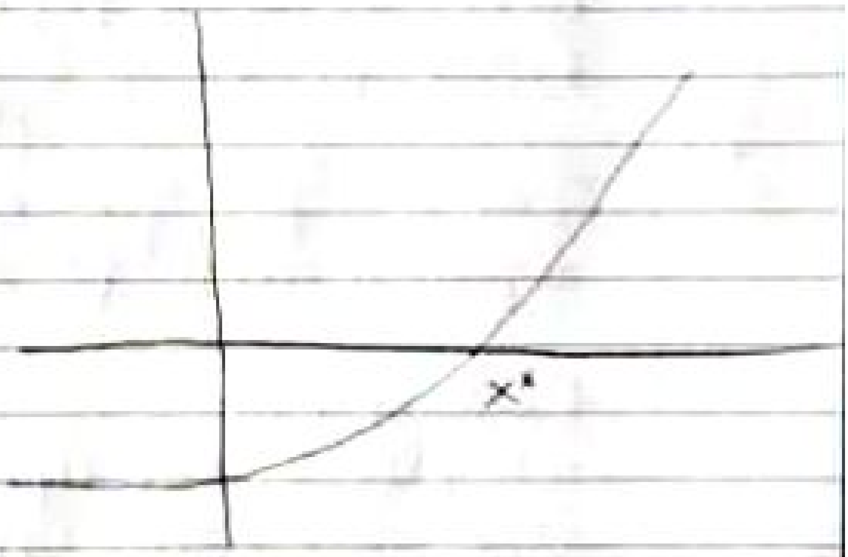
(Άσκηση)

# Μεθοδος της τεμνουσας

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

Χρειαζομαι δυο αρχικες προσεγγισεις $x_0$ και $x_1$
Η μεθοδος δεν γραφεται πλεον στη μορφη $x_{n+1}=\varphi(x_n)$

## Γεωμετρικη ερμηνεια




## Ταξη συγκλισης της μεθοδου

<u>Θεωρημα</u>: Εστω $x^*$ ριζα της $f(x)$ και $(a,b)\subset \mathbb{R}$ με $x^*\in(a,b)$, $f\in C^2(a,b)$, $f'(x^*)\neq 0$, $f''(x^*)\neq 0$. Τοτε υπαρχει διαστημα $I$ που περιεχει το $x^*$ τω. $\forall x_0, x_1 \in I$ με $x_0\neq x_1$ η ακολουθια $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που παραγει η μεθοδος της τεμνουσας ειναι καλα ορισμενη και συγκλινει στο $x^*$.

Ταξη συγκλισης: $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ χρυση τομη.

Το κοστος της μεθοδου ειναι <u>μονο</u> ο υπολογιόρος της $f$ σε κάθε βήμα.

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε $|x_{n+1}-x^*| \le C\,|x_n - x^*|^p$

$$|\tilde{x}_{n+1}-x^*| = |x_{2n+1}-x^*| \le C\,|x_{2n+1}-x^*|^p$$
$$\le C\left(C\,|x_{2n}-x^*|^p\right)^p$$

n περιττός

$n \to 2n+1$

$$\Longrightarrow |\tilde{x}_{n+1}-x^*| \le C^{p+1}\,|\tilde{x}_n - x^*|^{p^2}$$

Γιατί? Έστω $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια συγκλίνουσα ακολουθία με $\lim y_n = y^*$ και $p$ η τάξη σύγκλισης.

Τότε η $\tilde{y}_n = y_{2n}$ συγκλίνει στο $y^*$ και η τάξη σύγκλισης είναι $p^*$ τουλάχιστον.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Η μέθοδος της τέμνουσας χρησιμοποιείται συχνότερα στην πράξη (γιατί απαιτεί μόνο γνώση της $f$ και όχι της $f'$).

- είναι βραδύτερη στη σύγκλιση και απαιτεί καλές προσεγγίσεις $(x_0, x_1)$ για να συγκλίνει

- Είναι οικονομικότερη από ~~σ~~ τη μέθοδο του Newton.